数论史话

——从Fermat到Kummer

淮阴师范学院　孙智宏

http://www.hytc.edu.cn/xsjl/szh

希尔伯特：数论是一幢出奇美丽而和谐的大厦。

高斯：只有有勇气钻研到深处的人，才能到达数论这门至高无上学科的令人心醉的迷人之处。

雅可比：繁荣人类的精神是一切科学的唯一目的。在这种观点下，数的问题和世界体系的问题具有同等的价值。

§1. Fermat (1601-1665)

费尔马是第一个对数论作出广泛可观的贡献并给这门学科以巨大推动力的人，被称为“数论之父”。

费尔马很舒服地研究数论但他又抱怨**太孤单太宁静**了（欧拉在拉格朗日参加进来之前也一样），他孤独地研究数论，没有任何竞争，也没有合作者。他试图吸引帕斯卡(Pascal)对数论产生兴趣并一起合作，但帕斯卡不是搞数论的材料，身体又不好，后来对宗教的兴趣又超过了数学。帕斯卡的不合作导致费尔马出版他数论工作的书的计划落空。所以命运注定要由费尔马的儿子塞缪尔去竭尽全力收集他父亲散落各处的残留手稿。许多收信人只交出费尔马关于几何、代数、微积分的信件，而没有交给塞缪尔费尔马关于数的重要信件。所以费尔马肯定还有其它数论工作不为后人所知。

Pierre Fermat

费尔马小定理是费尔马在1640年10月18日给弗莱尼柯的信中叙述的。在1640年费尔马说他有一个证明，他说：“如果弗莱尼柯不嫌太长的话，会将他交给他”。这会是什么样的证明呢？

费尔马小定理第一个出版的证明属于欧拉(1736年,用二项式定理），但莱布尼兹的遗稿表明他早在1676-1680年间就用多项式定理给出证明了。顺便说一下，Wilson定理也是莱布尼兹首先发现的。

在1659年费尔马在通过卡尔卡维转交给惠更斯的信中写道：“由于在书中可以找到的那些常规的方法对证明这些困难的命题已不适用，我最终找到了一个最奇特的方法$\cdots$，我称它为无限下降法。最初我只用它证明否定性的结果。将它用在肯定性的问题上要难得多，故而，当我必须证明每个形如$4n+1$的素数是两个平方数之和时，我发现自己处在令人遗憾的困境中，但最终这样的问题被证明可以顺从于我的方法”。

1638年费尔马在丢番图《算术》的页边空白处写道：“我是第一人发现下面这个漂亮的命题：每个自然数都是至多k个k角数$n+(k-2)(n^2-n)/2$之和。”

$k=3$,Gauss(1801);$k=4$,Lagrange(1770); $k\geq 5$,Cauchy(1812).

惠更斯：依我看来，确实有一些关于数的奇妙性质非常值得我们去给出证明，其中之一，我确信就是在费尔马的信中关于平方和和多角数和的断言。但我们不缺少能做的更好的东西。

费尔马在生命后期给惠更斯的信中写道：“这些就是我对数的冥思苦想的故事，我把它记下来只是因为我害怕我会永远找不到空闲来写出和适当推广这些证明和方法。无论如何，这将被充作对于从事科学的人们的一个指针，指引他们自己去找出那些我没有写出来的东西。”

在代数记号仍然极端笨拙，在规范模式完全缺失的那个时代，费尔马要详细写出他的数论命题的证明会付出巨大的努力。同代人对此完全缺乏兴趣也一定令他非常沮丧，所以他最终没能把他的数论工作出版。

费尔马那些散落的工作总在吊数论学家的胃口，欧拉曾托人到法国搜寻费尔马的手稿，但一无所获。

费尔马是理论家，他感兴趣的是一般的方法和一般的原理而不是特殊情形，这反映在他所有的工作中，不论是分析还是数论。反之，欧拉基本上是个实验家。当他猜想到一个一般定律时他会很高兴，他愿化大量的时间去试图证明它。但是，如果找不到证明，而只有一些令人信服的实验证据，他几乎也感到同样欣慰。因此他的研究工作有着向各种可能的方向蔓延的倾向。

Leonhard Euler

§2. Euler (1707-1783)

历史上从来没有一个人象欧拉那样多产，象他那样巧妙地把握数学，象他那样产生那么多令人钦佩的结果。他是顶括括的方法发明家和熟练的能工巧匠。

欧拉对数论有一种狂热的热情。他白手起家，一个接一个地解决费尔马的猜想。例如：他花了7年时间证明两平方和定理，花了40年时间试图证明四平方和定理。欧拉的每篇数论文章都有很多热情洋溢的话。高斯说："这个领域特有的美吸引着每一个活跃在这方面的人，但没有谁比欧拉流露得更多"。

欧拉的算术工作，虽说延伸了五十多年，但也只构成了他的数量巨大的成品中的一小部分（4/76）。

在所有的数学分支中，欧拉在他那个时代都达到了无可争议的领导地位。他的对手达朗贝尔厌恶地称他是"**有魔力的人**".

欧拉的科学气质的最突出的特色是**非凡的机敏**，由于这种机敏他甚至**对于不经意的提示或者刺激都有反应**：一个从哥德巴赫来的关于费尔马数的素性问题，一个他开始甚至也没有完整地读过的费尔马关于四平方数之和的陈述；一个有Naude提出的初等组合问题；在一本由罕为人知的意大利贵族写的书中几个孤立的定理；收到法尼亚诺关于双纽线的书后对椭圆积分的研究；拉格朗日关于模素数的同余定理；拉格朗日对于费尔马四平方和的多少有点不恰当的证明等等。他也没有忽视观察的机会，诸如他对$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)$的计算。**每个机会都被迅速地抓住了**；每一个都为他的磨坊提供了谷物，常常**引起一长串令人印象深刻的研究**。

同样令人印象深刻的是，一旦一个问题引起了欧拉的**永不满足的好奇心**他就**从不放弃**。其他的数学家，譬如希尔伯特，将他们的生活清楚地分成不同的时期，在每个时期致力于一个单独的课题。欧拉不是这样。穷其一生，即便在丧失视力之后，似乎在他**脑袋里装着他那个时代的整个数学**，不管是纯粹的还是应用的。一旦他开始着手一个问题，不仅他会**一次又一次地回到它**，而且他喜爱把他的**网撒得越来越宽而永不丧失热情**，总是**期望揭开越来越多的秘密**。

欧拉的遗著《Tractatus de numerorum doctrina》(他生前写了16章后放弃，后于1849年出版)讨论了（模素数p的）k次剩余（他证明k次剩余构成子群并讨论了相应的商群，并试图证明$k = 3, 4, 5$且$k \mid p-1$时商群是循环群（**超越时代！**）），欧拉定理，原根存在性与原根个数，并提出三四次剩余的一些猜想。很象是高斯的《算术研究》(1801)前三章的初稿(Weil语)。

哥德巴赫对数论的热情以及他所提供的信息与鼓励推动了欧拉在数论中作出一系列发现。

一些问题整个一生都与欧拉失之交臂。其中最突出的，就涉及数论而言，或许是他对于二次互反律的一些猜想，这些猜想形成于1742年或其后不久，并且他直到生命的最后仍旧在强调他的重要性；那时他很少能有望得到他自己的一个证明，但他表达了他有信心的期盼：证明就会"很快出现"。

§3. Lagrange (1736-1813)

Lagrange的大部分工作都和Euler 有关，他追随Euler，**把Euler 的工作系统化、深入化，但又以自己的独创记录了全部研究生涯**。他去世后给数学的所有分支都留下了可供仿效的榜样、有待解决的问题和以使发展的技巧，他的工作一定程度上展现了十九世纪的数学，起到了承上启下的作用，这使得他对后世的影响与Euler旗鼓相当。

由于其过度的谦虚和自卑，拉格朗日在多个方面与欧拉完全不同，欧拉对于自己的，同样也对同代人的发现充满火一般的热情。拉格朗日在一次写给拉普拉斯的信中说，他"**在其他人的工作中比在自己工作中的得到更多的愉悦，而对后者总不满意**"。拉格朗日最好的工作中，许多或者较大部分都是直接由欧拉的工作激发的，他的确对这些工作许多年来一直在进行刻苦思索. 对此，1764年拉朗德曾写信给欧拉说，拉格朗日作为一个年轻人已经"**记熟了他们，直到最微小的细节**"。这特别可用到拉格朗日的数论工作上，而这只是在1768年才吸引他的主动兴趣的课题而从事它则不超过十年。

拉格朗日对欧拉很冷淡，但和达朗贝尔友谊最深。他在达朗贝尔面前是胆怯的，他写信给达朗贝尔说："研究算术会给我带来很多困难，也许是最不值得的，我知道你并不希望我在这方面有很多的发现，我想你是不错的。"

拉格朗日在数论上最伟大的贡献是创立二元二次型理论（全集中占98页），其它贡献包括Pell方程解的存在性、四平方和定理的证明、Wilson定理的证明、同余方程的拉格朗日定理、二次无理数的连分数展开的周期性等.

拉格朗日: 我搞研究更多是为了消遣，我就象盖房子的贵族，盖了拆，拆了盖，直到满意为止。我有一个坏习惯，总要几次重写我的论文，直到我感到满意为止，这也使我不可能停下来休息.

达朗贝尔训斥拉格朗日过多地饮用茶叶和咖啡来提神，刺激了灵感，但损害了健康。

拉格朗日在1804年写信给高斯说：“你的《算术研究》使你立刻上升到第一流数学家的行列. 长期以来，我放弃了这一类的研究，但它们对我仍保持了很大的吸引力，对我来说享受着别人的劳动成果，这就足够了。”

§4. Legendre (1752-1833)

勒让德第一次进入数论的经历是一个长篇论文，他在1785年将它递交给巴黎科学院，以标题“不定分析研究”发表(95页，包含勒让德方程$ax^2+by^2+cz^2=0$有非零解的判别条件及用之对二次互反律的部分证明)：它像年轻的高斯在哥廷根大学图书馆发现了这份文献时，写给他老师的1796年5月的信中所说的那样，是“一篇杰出的论文”；在勒让德写这篇文章时，欧拉已经逝世而拉格朗日也已停止了在此领域的积极活动。显然勒让德是他们著作的热情的学生，在论文的第84页包含有一段如此接近二次互反律的陈述，以致几乎不能与它区分开来。

随着岁月流转，勒让德启动了一个更具雄心的计划；它采用具充分容量的长卷形式，力求给出对于数论的一个包罗广泛的记述，不仅包括他自己的研究，还要包括欧拉和拉格朗日的所有重要发现，同样还对许多证明不甚确定的结果列出数据（以大范围列表的形式）。1798年它在巴黎发行，书名为《数论随笔》；作者在前言中写道：“我并没有打算提供一个完全的论述，而仅仅旨在粗略地显示出这个理论的当前状态”。

在数论的好几个重要问题和方向上（素数定理、二次互反律、三平方和问题、二次型复合），勒让德都是高斯的先行者，这有点超出了高斯愿意承认的程度（Weil语）。

无疑高斯选来描述他的二次型复合的高斯理论并非精心制作的；的确，以致对于《算术研究》的读者来说它成了一个障碍物，直到后来狄利克雷又重新回到非常接近勒让德原来的构造从而恢复了它的简明性。高斯是受到勒让德《Essai》的启发才发现了他自己的理论的吗？这似乎至少看起来是有道理的，尽管高斯说，直到《算术研究》的“绝大部分”付印后他才看到勒让德的书；实际上他在1798年秋天着手研究“复合”，那时他访问了在Helmstedt的Pfaff（参看他给Bolyai的1798年11月29日的信）；或许他可能在那里已看到过勒让德的《Essai》。《算术研究》中关于二次型的第五章直到很后才付印，高斯在1799年2月才着手，而且在1800年2月尚未完成。

勒让德曾写信给雅可比抱怨说，高斯说二次互反律是只属于他一个人的成就。

高斯比勒让德晚三年发表素数定理，也晚三年发表最小二乘法，但高斯在文章中都说他多年以前就发现了，这引起勒让德的不快与抱怨。对此，高斯保持沉默。

高斯：我所有的理论工作都与勒让德的工作如此相似，也许这就是我的命运吧。

§5. Gauss （1777-1855）

二次互反律由欧拉在1742年发现，1785年勒让德重新发现并给出部分证明。1796年19岁的高斯通过复杂的归纳作出二次互反律的第一个证明，他说："这使我伤了整整一年的脑筋"。高斯一生共给出二次互反律六个证明。

高斯：《算术研究》（1801），全书共分为七章：1.一般同余论；2.一次同余式；3.幂剩余；4.二次剩余；5.二次型；6.应用；7.分圆问题。

高斯化了四年多时间才确定二次高斯和的值。别人说他是天才，他举此例说，" 这么简单的符号问题，我都化了四年多时间才解决，我是天才吗？"

为了考察规律，高斯列出了包含三百万以内素数、平方剩余及循环小数的巨大的数值表。他对所有的$\frac{1}{p}(p < 1000)$计算了循环周期（有时要计算好几百位小数）。

Atiyah（阿提雅）：历史上的许多大数学家，比如Euler和Gauss，为了给自己找到素材而不得不靠自己的双手进行冗长的数值计算，他们正是借助这些素材才推测出了具有普遍性的定律或者是发现了著名的模式。

高斯：任何一个人如果象我那样坚持深入持久地思考问题，都会得出我的那些发现。

高斯从1807年起研究三四次剩余，1813年他写道“经过七年的冥思苦索，终于掌握了双二次剩余的理论”。1828年与1832年高斯出版了关于四次剩余的两篇重要文章，在1832年文章最后猜想四次互反律，并说四次互反律的证明是“算术中最深奥的秘密”。

Gauss整数环: $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

$\mathbb{Z}[i]$中四次剩余问题: 设$\alpha, \pi \in \mathbb{Z}[i]$, 问$x^4 \equiv \alpha \pmod{\pi}$在$\mathbb{Z}[i]$中是否有解?即是否存在$x, y \in \mathbb{Z}[i]$使$x^4 = \alpha + y\pi$.

四次互反律大意：设α,π为$\mathbb{Z}[i]$中不可分数(Gauss素数), 则$x^4 \equiv \alpha \pmod{\pi}$在$\mathbb{Z}[i]$中是否可解取决于$x^4 \equiv \pi \pmod{\alpha}$在$\mathbb{Z}[i]$中是否可解.

高斯去世后人们在他的遗稿中发现四次互反律的分圆证明和几何证明。但有数学家说，那很可能是在看到爱森斯坦的证明后写的。

$\omega = (-1+\sqrt{-3})/2$.

Eisenstein整数环: $\mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

在$\mathbb{Z}[\omega]$中考虑三次剩余问题, 则有三次互反律.

三次互反律大意：设α,π为$\mathbb{Z}[\omega]$中不可分数(Eisenstein素数),则$x^3 \equiv \alpha \pmod{\pi}$在$\mathbb{Z}[\omega]$中是否可解取决于$x^3 \equiv \pi \pmod{\alpha}$在$\mathbb{Z}[\omega]$中是否可解.

§6. Eisenstein （1823-1852）

爱森斯坦是他父母唯一存活下来的孩子, 一生身体虚弱。他从15岁开始自己买数学书阅读，通过阅读Euler和Lagrange的著作他掌握了微积分。1842年他买到一本Gauss的《算术研究》，并深入钻研。除数学之外，爱森斯坦还有相当的音乐天赋。1844年他还是Berlin(柏林)大学一年级大学生（21岁）时，在著名的Crelle杂志上出版了23篇文章和两个问题，其中包含应用Gauss和给出三四次互反律的首次证明。当年他受Gauss邀请访问Gauss两周，Gauss对他充满了称赞。1846年Gauss写信给von Humboldt说, 爱森斯坦是世纪罕见的天才。1845年Kummer (库莫尔)等数学家安排授予爱森斯坦荣誉博士学位。Jacobi宣称他在1837年的讲义中就给出过三四次互反律的证明，并于1846年在Crelle杂志上出版他的讲义内容。爱森斯坦愤怒地否认有任何剽窃，Jacobi的攻击使他离开互反律研究约一年，并大大减少文章的出版量。1845年爱森斯坦又利用Abel的椭圆函数论给出三四次互反律的解析证明.

Gotthold Eisenstein

Close this window

JOC/EFR November 2008

© Copyright information

The URL of this page is:
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Eisenstein.html

1847年爱森斯坦出版120页重要论文“关于椭圆函数的报告”． 1850年爱森斯坦利用Kummer刚创立的理想论一举建立一般的爱森斯坦互反律。由此对椭圆函数、模形式和数论发展产生重大影响。1851年在Gauss提议下爱森斯坦被选进Gottingen(哥廷根)科学院，之后不久应Dirichlet的要求他又被选入Berlin科学院。1852年爱森斯坦29岁时因患肺结核而离开人世。他在最后一篇论文中建立了爱森斯坦八次互反律，并说要在以后出版完整的八次互反律，因他的去世完整的八次互反律迟至1889年才由Goldscheider给出。爱森斯坦生前得到洪堡（von Humboldt）的资助和支持。爱森斯坦去世后当时83岁的洪堡亲自为其送葬，以示他对这位天才的珍爱和惋惜。

爱森斯坦的其它数论贡献包括三元二次型、爱森斯坦和、二项式系数同余式等。

高斯：只有三个最伟大的数学家，那就是阿基米德，牛顿和爱森斯坦。

今天最一般的互反律由Artin(阿廷)在1927年建立。

雅可比在1846年的文章说：“三四次互反律的这些证明通过我在哥尼斯堡的讲座笔记已广泛传播，如狄利克雷和库莫尔在几年前就已知道，而由爱森斯坦先生新近在克雷洛杂志第27卷出版，爱森斯坦所给的二次互反律证明也正是我在1827年写给勒让德的信中给出的证明，而勒让德已将它放入他的数论书第三版中。”爱森斯坦在克雷洛杂志第35卷回击雅可比，他说：“雅可比所称的属于他的二次互反律证明与高斯给出的第六个证明没有什么本质的不同。”

柯西（Cauchy）也加入了争论，他说类似于雅可比所称的二次互反律证明他在1829年就已出版，并在1840年重印。在1840年的文章注记中，他说：”我刚才给出的论证已在1829年出版过，证明比勒让德的更严格，比高斯的更短。勒让德在1830年书中出版了这个证明，并归功于雅可比，却没有注意到我已在1829年9月出版了这个证明。”爱森斯坦说：”根据雅可比的评论，我离开了互反律，直到最近我用椭圆函数获得互反定律的新证明。”狄利克雷注意到爱森斯坦的文章大为减少，评论说：“爱森斯坦已经学会了自我批评”。但这只是事实的一半。

库莫尔：爱森斯坦在克雷洛杂志第34卷上的结果既不是最简单的，也不是最好的。如果爱森斯坦更聪明地工作，对单位根知道更多些，他应该能够得出我的简单的互反律。库莫尔在一篇综述中进一步诋毁爱森斯坦，他说："我们不得不考虑爱森斯坦在克雷洛杂志第28卷第246页给出的证明，它实际上是高斯证明的修改。1844年爱森斯坦在克雷洛杂志上重新给出这些证明。爱森斯坦的证明非常接近于Lebesgue的证明，虽然看起来基于完全不同的原理，他的第一批证明同雅可比十多年前发现的一样，他的四次互反律证明是很聪明的，但缺乏真正的原创，既不是他也不是其他人在使用这些原理发现或者证明高次互反律方面取得成功。他的努力使他甚至在八次幂上也只是发现特殊情形的互反律。爱森斯坦在一篇文章中想通过归纳建立最一般的互反律，但一点也没有成功。"

Hasse(哈斯)表达了与库莫尔不同的观点，他称赞爱森斯坦关于一般互反律的工作是惊人的优美。

爱森斯坦去世后，他的工作在很长的时间内也几乎被人遗忘。

黎曼关于ζ函数的研究灵感来源于在柏林与爱森斯坦的交谈。

§7. Dirichlet（1805-1859）和Jacobi（1804-1851）

狄利克雷的数论贡献：算术级数的Dirichlet定理，二元二次型类数公式，Dirichlet单位定理，有理四次互反律。

雅可比的数论贡献：Jacobi和，三四次互反律证明，有理三次互反律, 数论与椭圆函数的联系（自然数表为四平方和、八平方和的表示方法数），二项式系数同余式等。

1825年高斯在哥廷根宣读关于四次剩余的第一篇论文，后于1828年出版。受高斯论文启发，雅可比1827年在Crelle杂志不加证明地宣布有理三次互反律, 狄利克雷在1832年利用勒让德关于方程$ax^2+by^2+cz^2=0$的著名定理建立有理四次互反律，被雅可比称为精明的杰作。

狄利克雷夫人：“雅可比和狄利克雷的关系是这么好，既可以坐在一起好几个小时，保持数学上的沉默，也可以完全互不相让，而时常是狄利克雷告诉他辛辣的真理，雅可比理解的那么好，雅可比的伟大的精神知道如何屈服于狄利克雷的伟大性格”。

雅可比:“只有狄利克雷，不是我也不是柯西，更不是高斯，才知道什么是最完美的严格证明，我们都要向他学习。当高斯说他证明了某个命题时，我觉得可能性很小；当柯西这样说的时候，我觉得可能性是一半对一半；但如果狄利克雷这样说，那么肯定就是那么回事。”

闵可夫斯基：狄利克雷掌握了把最多的看得见的思想和最少的盲目的公式连接起来的艺术。

Burde有理四次互反律（Burde，1969）：设p,q为不同的$4k+1$形素数，$x^2 \equiv p \pmod q$有解，$p = a^2+b^2, 2|b$, $q = c^2+d^2, 2|d$,

(i) 若$x^2 \equiv ac-bd \pmod q$有解，则

$$x^4 \equiv q \pmod p\text{有解} \iff x^4 \equiv p \pmod q\text{有解}.$$

(ii) 若$x^2 \equiv ac-bd \pmod q$无解，则

$$x^4 \equiv q \pmod p\text{有解} \iff x^4 \equiv p \pmod q\text{无解}.$$

Burde有理四次互反律一度被认为是独立于四次互反律的重要结果。但我的工作表明它是四次互反律的简单推论。事实上，Burde有理四次互反律非常类似于雅可比1827年的有理三次互反律，并且T.Gosset在1911年就建立了与Burde有理四次互反律等价的结果。尽管如此，Burde有理四次互反律产生了很大的影响，掀起三、四、八次互反律研究的新热潮,直到今天还没有穷尽。(E.Lehmer, K.S.Williams, Zhi-Hong Sun)

§8. Riemann （1826-1866）

Riemann全集只有薄薄的一卷，而且其中三分之二是他的遗稿，但Riemann的每篇论文都是划时代的大作。Riemann的伟大在于这样的事实，几乎所有**他的工作都被证明是一种新的、富有成果的研究的开端**。他的工作永远地改变了数学在分析、几何与数论方面的进程。

1859年黎曼发表著名的8页论文“论不大于给定数的素数个数”，指出可通过研究复变函数$\zeta(s)$的零点分布证明素数定理，从而开拓解析数论。

黎曼8页论文的重要贡献在于把人们的注意力引向黎曼猜想。黎曼只是在文中顺带地说到：“ 我们发现很多这样的零点，非常可能地ζ函数的所有非平凡零点实部均为$\frac{1}{2}$, 确实值得找它的严格证明，但作了一些不成功的尝试后，我暂时把这个研究放在一边，因为看来它对于我的研究的直接目标并非必需。”

他关于ζ函数的性质和五个猜想从何而来，他只在脚注中说："这是从我发现的一个表达式得来的，但我还没有把这个表达式简化到足以发表的程度。"黎曼留下的手稿表明，他已计算了ζ函数的许多零点。原来认为的天才思想与非凡直觉竟然（与高斯一样）来源于大量的计算，黎曼曾在手稿中将$\sqrt{2}$算到38位小数。

A.Weil（魏伊）：Riemann猜想看起来是个分析问题，但今天回过头去看，我们知道事情显然不是这样。不知由于什么缘故，通过某种我们尚不能解释的联系，Riemann猜想表达了代数数域的一些地地道道的数论性质。

在Riemann之后，Dirichlet（狄利克雷）引进L函数，从而有广义Riemann猜想;Dedekind (戴德金)对代数数域引进Dedekindζ函数，从而有类似Riemann猜想；Artin（阿廷）对椭圆曲线引进ζ函数，也有类似Riemann猜想，由Hasse（哈斯）解决；Weil（魏伊）引进并解决一般代数曲线的Riemann猜想，并对一般代数簇给出黎曼猜想的形式，1974年Deligne（德林）解决Weil猜想。

Riemann猜想涉及到代数函数论、数论、椭圆曲线、模形式、代数几何等诸多分支，是困难而又意义重大的数学问题。

Weil是在狱中解决一般代数曲线的黎曼猜想。他在1940年给妻子的信中说："我的数学工作进展远远超过我的预想，但是我也有一点担心－如果只有在监狱中我才能做得如此好，那是不是意味着每年我得设法让自己被关起来两三个月？"

Weil：每个称得上数学家的人都经历过那种兴奋的状态，在其中新的想法一个接一个，就象奇迹一般。这样的感觉有时可以持续数小时，甚至是数天。一旦你经历过，你就会渴望再次经历，但它并非随你的意愿而来，而是从艰苦的工作中来。

Weil：数学中有一个学科（这是一个十分好的，完全正当的学科，也是十分好的一门数学。）被不恰当地称作解析数论。从某种意义上来说，它是黎曼开创的，而黎曼根本不是数论学家；后来Hadamard等人，再其次是Hardy把它发扬光大，这些人也都不是数论学家（我与Hadamard很熟）。在我看来，**解析数论不是数论，而是分析**。说它是分析（即处理经常出现象“素数”这种数论名词的特殊问题的分析）的理由是它主要跟不等式及渐进估计打交道；在我看来，这正好把它与数论区别开来。我把它归到分析的目下，正象概率论只是积分论的一个分支，只不过自己有一套术语罢了。

§9. Kummer （1810-1893）

库莫尔的数论贡献包括理想论，分圆域，高次互反律，费尔马大定理与p-adic分析。

魏伊（Weil）在为库莫尔全集所写的前言中说："在库莫尔去世之后，希尔伯特统治德国数学界多年，他的著名的数论报告有一半以上的内容基本上是库莫尔的工作，只有很小的非本质性改进，缺乏对前人数学风格的尊重，没有介绍库莫尔采用的p-adic分析，对库莫尔工作引用也不充分。"

有感于高斯留下的数学日记，库莫尔宣称"在我的遗作中什么也找不到"。

主要参考文献

1. A. Weil著，胥鸣伟译，数论——从汉穆拉比到勒让德的历史导引，高等教育出版社，2010.

2. A. Weil, 今昔数论两讲(王启明译），数学译林，1981.

3. F. Lemmermeyer, Reciprocity Laws: From Euler to Eisenstein, Springer, Berlin, 2000.

4. K. Ireland and M. Rosen, A Classical Introduction to Modern Number Theory, 2nd ed., Springer, New York, 1990.

5. M. Schmitz, The life of Gotthold Ferdinand Eisenstein, Res. Lett. Inf. Math. Sci. 6(2004), 1-13.

6. M. J. Collison, The origins of the cubic and biquadratic reciprocity laws, Arch. History Exact Sci. 17(1977), 63-69.